M—B 2

平成 28 年度入学試験問題

数　学

(90 分)

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子は開かないでください。
2. この問題冊子は 6 ページあります。試験中，ページの脱落等に気づいた場合は，手を挙げて監督者に知らせてください。
   解答用紙(マークシート)の汚れなどに気づいた場合も，同様に知らせてください。
3. 解答用紙(マークシート)は折り曲げたり，汚したりしないでください。
4. 解答は，すべて解答用紙(マークシート)に記入し，解答用紙(マークシート)の枠外には，なにも書かないでください。
5. **試験問題は問題記号ア～ルで 41 問あります。**
   解答用紙(マークシート)には，問題記号がア～ンまで印刷されています。解答にあたっては，問題記号ア～ルの範囲内で該当する解答欄に解答してください。
6. 解答上の注意は，裏表紙に記載してあるので，この問題冊子を裏返して必ず読んでください。**ただし，問題冊子を開いてはいけません。**
7. マークは必ず HB の黒鉛筆を使用し，訂正する場合は，完全に消してからマークしてください。
8. 監督者の指示に従って，解答用紙(マークシート)に解答する科目・受験番号をマークするとともに，受験番号，氏名を記入してください。
9. 解答する科目，受験番号，解答が正しくマークされていない場合は，採点できないことがあります。
10. 筆記用具以外は，使用しないでください。
11. 試験終了後，問題冊子は持ち帰ってください。

〔 I 〕

(1) $\dfrac{x^2+10x+5}{x^3+x^2-x-1} = \dfrac{\boxed{\text{ア}}}{x+1} + \dfrac{\boxed{\text{イ}}}{(x+1)^2} + \dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{x-1} + \dfrac{\boxed{\text{エ}}}{(x-1)^2}$

(2) 一般項が $a_n = 3^n - 2^{100}$ である数列 $\{a_n\}$ について，$a_n > 0$ となる最小の n は $n = \boxed{\text{オ}}$ である．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする．

(3) 2 直線 $y = 3x + 2$ と $y = -4x - 5$ のなす鋭角を θ とすると

$\tan\theta = \dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ である．

(4) 等式 $f(x) = |x+1| + |x| + \displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$ を満たす関数 $f(x)$ について，

$\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \boxed{\text{ク}}$ である．

(5) 方程式 $xy + 3x - 2y = 66$ を満たす自然数 x，y の組は全部で $\boxed{\text{ケ}}$ 個ある．

〔Ⅱ〕

(1)　1，2，3の数を1つずつ書いたカードがそれぞれ3枚ずつ合計9枚ある．この中から4枚のカードを取り出し，1列に並べて，4桁の整数をつくる．

(a)　1が1個も含まれない整数は全部で $\boxed{\text{コ}}$ 通りある．

(b)　各位の和が奇数である整数は全部で $\boxed{\text{サ}}$ 通りある．

(c)　偶数または3の倍数である整数は全部で $\boxed{\text{シ}}$ 通りある．

(2)　数列 $\{a_n\}$ が次で定められている．

$$a_1 = 2,\ 3^{n+1}a_{n+1} + 20a_{n+1}a_n - 3^n a_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(a)　$b_n = \dfrac{3^{n-1}}{a_n} - \dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$ とおくと，数列 $\{b_n\}$ は，初項 $\boxed{\text{ソ}}$，公比 $\boxed{\text{タ}}$ の等比数列となる．

(b)　数列 $\{a_n\}$ は

$$a_n = \frac{\boxed{\text{チ}}\,3^{n-1}}{\boxed{\text{ツ}}\,3^{2(n-1)} + \boxed{\text{テ}}} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定められる数列である．ただし，$\boxed{\text{ツ}}$ は正の数であり，$\boxed{\text{ツ}}$ と $\boxed{\text{テ}}$ は互いに素である．

〔Ⅲ〕 円 $C : x^2 + y^2 = 1$ 上を動く動点Pがある．Pにおける C の接線を ℓ_{P} とする．

(1) $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ のとき，ℓ_{P} の方程式は

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\boxed{\text{ト}}\,x + \boxed{\text{ナ}}\right)$$

である．

(2) Pの y 座標を p とする．Pが C 上を $p \neq 0$ を満たしながら動くとき，ℓ_{P} と曲線 $y = x^2 - 2$ で囲まれる部分の面積 S を p で表すと

$$S = \frac{1}{6}\left(p^{\boxed{\text{ニ}}} + \boxed{\text{ヌ}}\,p^{\boxed{\text{ネ}}} + \boxed{\text{ノ}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

である．したがって $p = \dfrac{\boxed{\text{ハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}}$ のとき，S は最小となる．

〔Ⅳ〕

(1) 関数

$$y = 4\left(\tan^2\frac{x}{2}\right)\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right)\left(1 - \sin^2\frac{x}{2}\right)^2 \quad \left(\frac{\pi}{4} \leqq x \leqq \frac{\pi}{3}\right)$$

とする.

(a) $\cos x = \dfrac{2}{3}$ のとき，$\tan^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{\boxed{\text{フ}}}$ であり，$y = \dfrac{\boxed{\text{ヘ}}}{\boxed{\text{ホ}}}$ である.

(b) y^2 の最大値は $\dfrac{\boxed{\text{マ}}}{\boxed{\text{ミ}}}$ であり，最小値は $\dfrac{\boxed{\text{ム}}}{\boxed{\text{メ}}}$ である.

(2) 座標空間に O(0, 0, 0), A(1, 0, 1), B(1, 2, 0), C(0, a, 2) がある.

(a) 点 C が平面 OAB 上にないとき $a \neq \boxed{\text{モ}}$ である.

(b) $\triangle$ABC の面積が最小となるのは $a = \boxed{\text{ヤ}}$ のときである.

(c) 点 $C_0\left(0,\ \boxed{\text{ヤ}},\ 2\right)$ から平面 OAB に垂線 C_0H を下ろす.

$\overrightarrow{C_0H} \perp \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{C_0H} \perp \overrightarrow{OB}$ より,

$$\overrightarrow{OH} = \frac{\boxed{\text{ユ}}}{\boxed{\text{ヨ}}}\overrightarrow{OA} + \frac{\boxed{\text{ラ}}}{\boxed{\text{ヨ}}}\overrightarrow{OB}$$

(d) 四面体 $HABC_0$ の体積は $\dfrac{\boxed{\text{リ}}}{\boxed{\text{ル}}}$ である.

解答上の注意

問題の文中の $\boxed{\quad ア \quad}$ などには数値が入ります。それらを解答用紙のア，イ，ウ，…で示された解答欄にマークして答えなさい。

1. 解答欄の各桁の該当する数字の欄にマークしてください。
2. 解答が負数の場合のみ符号欄にマークしてください。
3. 分数形 $\dfrac{\boxed{\quad\quad}}{\boxed{\quad\quad}}$ の部分では，既約分数(それ以上約分できない分数)で表し，分母は必ず正とします。また，この形で整数を表すときには，分母を1とします。
4. 根号の中は，正の整数であって，2以上の整数の平方で割り切れないものとします。

解答記入例：$\boxed{\quad エ \quad}$ に -5 と解答する場合

	符号	10 の 桁	1 の 桁
エ	●	① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨	① ② ③ ④ ● ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⓪

$\boxed{\quad カ \quad}$ に57と解答する場合

	符号	10 の 桁	1 の 桁
カ	⊖	① ② ③ ④ ● ⑥ ⑦ ⑧ ⑨	① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ● ⑧ ⑨ ⓪

解答表示例

$\dfrac{\boxed{\quad\quad}}{\boxed{\quad\quad}}$ に $-\dfrac{3}{2}$ を当てはめる場合には $\dfrac{\boxed{\ -3\ }}{\boxed{\ 2\ }}$，0の場合には

$\dfrac{\boxed{\ 0\ }}{\boxed{\ 1\ }}$ とします。

$\dfrac{\boxed{\quad\quad}}{\boxed{\quad\quad}}\sqrt{\boxed{\quad\quad}}$ に $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を当てはめる場合には

$\dfrac{\boxed{\ -1\ }}{\boxed{\ 2\ }}\sqrt{\boxed{\ 3\ }}$ とします。

$\boxed{\quad\quad}x^3+\boxed{\quad\quad}x^2+\boxed{\quad\quad}x+\boxed{\quad\quad}$ に $-x^3-x+1$ を当てはめる場合には $\boxed{\ -1\ }x^3+\boxed{\ 0\ }x^2+\boxed{\ -1\ }x+\boxed{\ 1\ }$ とします。