M—A 1

平成28年度入学試験問題

数　学

(90分)

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子は開かないでください。
2. この問題冊子は5ページあります。試験中，ページの脱落等に気づいた場合は，手を挙げて監督者に知らせてください。
   解答用紙(マークシート)の汚れなどに気づいた場合も，同様に知らせてください。
3. 解答用紙(マークシート)は折り曲げたり，汚したりしないでください。
4. 解答は，すべて解答用紙(マークシート)に記入し，解答用紙(マークシート)の枠外には，なにも書かないでください。
5. **試験問題は問題記号ア～ラで39問あります。**
   解答用紙(マークシート)には，問題記号がア～ンまで印刷されています。解答にあたっては，問題記号ア～ラの範囲内で該当する解答欄に解答してください。
6. 解答上の注意は，裏表紙に記載してあるので，この問題冊子を裏返して必ず読んでください。**ただし，問題冊子を開いてはいけません。**
7. マークは必ずHBの黒鉛筆を使用し，訂正する場合は，完全に消してからマークしてください。
8. 監督者の指示に従って，解答用紙(マークシート)に解答する科目・受験番号をマークするとともに，受験番号，氏名を記入してください。
9. 解答する科目，受験番号，解答が正しくマークされていない場合は，採点できないことがあります。
10. 筆記用具以外は，使用しないでください。
11. 試験終了後，問題冊子は持ち帰ってください。

〔I〕

(1) $\log_9(x+2)^2-\log_3(6+x)<1$ を満たす最小の整数 x は $\boxed{\text{ア}}$ である.

(2) $0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲で $\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}$ のとき, $\theta=\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\pi$ である.

(3) 6で割ると5余り, 7で割ると3余るような2桁の自然数で最大のものは $\boxed{\text{エ}}$ である.

(4) $\dfrac{x+1}{x^2+7x+12}=\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{x+3}+\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{x+4}$

(5) 座標平面上の原点Oで x 軸に接する半径 r の円が, 放物線 $y=kx^2\ (k>0)$ と原点以外の点 $\mathrm{P}(a,\ ka^2)$ で交わるとき,

$$\lim_{a\to 0}\frac{1}{r}=\boxed{\text{キ}}\,k$$

である.

〔II〕

(1) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする．数列 $\{a_n\}$ は以下の条件で定められている．

$$a_1 = S_1 = 5,\ S_n = \frac{n(n+2)}{(n+3)(n-1)} S_{n-1} \quad (n = 2, 3, 4, \cdots)$$

(a) $a_3 = \boxed{\text{ク}}$

(b) $\dfrac{3+2}{2} S_2 = \boxed{\text{ケ}}$， $\dfrac{3+3}{3} S_3 = \boxed{\text{コ}}$

(c) 数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = \frac{\boxed{\text{サ}}}{(n+3)(n+\boxed{\text{シ}})}$$

(2) 平面上に平行四辺形 OABC があり，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = \sqrt{3}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = \sqrt{5}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = 2$ である．

(a) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \boxed{\text{ス}}$

(b) 次の(i)と(ii)の両方の条件を満たす点 P のうち，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ が最小となる点を P_0 とすると，$|\overrightarrow{\mathrm{OP_0}}| = \boxed{\text{セ}}\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}$ である．

(i) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は，2つの正の整数 m，n を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = m\overrightarrow{\mathrm{OA}} + n\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と表される．

(ii) 直線 AC と直線 OP は垂直である．

(c) (b)の P_0 に対して，直線 AC と直線 BP_0 の交点を Q とする．

$\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|} = \dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$ である．

〔Ⅲ〕 袋Aには白玉3個，赤玉7個，袋Bには白玉6個，赤玉4個，袋Cには白玉5個，赤玉3個が入っている．1枚の硬貨を投げて，表が出たときには袋Aから玉を2個取り出し，袋Cに入れ，裏が出たときには袋Bから玉を2個取り出し，袋Cに入れる．この試行をTとする．

(1) 試行Tを1回行ったとき，袋Cに白玉が5個入っている確率は $\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$ である．

(2) 試行Tを1回行い，続いて袋Cから玉を3個取り出すとき，取り出した玉の中に白玉がちょうど2個含まれる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ であり，少なくとも赤玉が1個含まれる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ である．

〔Ⅳ〕

(1) (a) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^4}{n^5}=\frac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}$

(b) i を虚数単位とする．$z^3=8i$ を満たす複素数 z のうち，実部が最小のものは $\boxed{\text{ハ}}\sqrt{\boxed{\text{ヒ}}}+\boxed{\text{フ}}\,i$ である．

(2) 座標平面上に原点Oと異なる点 $\mathrm{Q}(a,\ 0)$ と点 $\mathrm{R}\left(\frac{5}{a},\ 0\right)$ がある．

点 $\mathrm{A}(0,\ 1)$ と点Rを通る直線と点 $\mathrm{B}(0,\ -1)$ と点Qを通る直線の交点をPとする．

(a) 点Pの座標は $\left(\frac{\boxed{\text{ヘ}}\,a}{a^2+\boxed{\text{ホ}}},\ \frac{-a^2+\boxed{\text{ホ}}}{a^2+\boxed{\text{ホ}}}\right)$ である．

(b) 点Qが $a<0$ または $a>0$ を満たしながら動くとき，点Pは2次曲線

$$C:\frac{x^2}{\boxed{\text{マ}}}+y^2=1$$

上を動く．

(c) $a=1$ のとき，点Pにおける2次曲線 C の接線と x 座標が正である C の焦点との距離は $\frac{1}{\sqrt{\boxed{\text{ミ}}}}$ である．

(3) 数直線上を運動する点Pの時刻 t (ただし，$t \geqq 0$)における速度を $v = e^{-t}(\sin t - \cos t)$，座標を $x = F(t)$ とし，$F(0) = 0$ とする．

(a) $F(t) = e^{-t}\left(\boxed{\quad ム \quad}\sin t + \boxed{\quad メ \quad}\cos t\right)$

(b) Pの座標が最大となるのは $t_0 = \dfrac{\boxed{\quad モ \quad}}{\boxed{\quad ヤ \quad}}\pi$ のときである．

(c) 時刻0から時刻 t_0 までのPの道のりは

$$\frac{1}{\sqrt{\boxed{\quad ユ \quad}}}\left(\boxed{\quad ヨ \quad}e^{-t_0} + \boxed{\quad ラ \quad}e^{-\frac{\pi}{4}}\right)$$

である．

解答上の注意

問題の文中の $\boxed{\text{ア}}$ などには数値が入ります。それらを解答用紙のア，イ，ウ，…で示された解答欄にマークして答えなさい。

1. 解答欄の各桁の該当する数字の欄にマークしてください。
2. 解答が負数の場合のみ符号欄にマークしてください。
3. 分数形 $\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ の部分では，既約分数(それ以上約分できない分数)で表し，分母は必ず正とします。また，この形で整数を表すときには，分母を1とします。
4. 根号の中は，正の整数であって，2以上の整数の平方で割り切れないものとします。

解答記入例：$\boxed{\text{エ}}$ に -5 と解答する場合

	符号	10 の 桁									1 の 桁									
エ	●	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	①	②	③	④	●	⑥	⑦	⑧	⑨	⓪

$\boxed{\text{カ}}$ に 57 と解答する場合

	符号	10 の 桁									1 の 桁									
カ	⊖	①	②	③	④	●	⑥	⑦	⑧	⑨	①	②	③	④	⑤	⑥	●	⑧	⑨	⓪

解答表示例

$\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ に $-\dfrac{3}{2}$ を当てはめる場合には $\dfrac{\boxed{-3}}{\boxed{2}}$，0の場合には $\dfrac{\boxed{0}}{\boxed{1}}$ とします。

$\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}\sqrt{\boxed{}}$ に $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を当てはめる場合には $\dfrac{\boxed{-1}}{\boxed{2}}\sqrt{\boxed{3}}$ とします。

$\boxed{}x^3+\boxed{}x^2+\boxed{}x+\boxed{}$ に $-x^3-x+1$ を当てはめる場合には $\boxed{-1}x^3+\boxed{0}x^2+\boxed{-1}x+\boxed{1}$ とします。