

2021 年度入学試験問題

数 学

(90分)

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子は開かないでください。
2. この問題冊子は4ページあります。試験中、ページの脱落等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
解答用紙(マークシート)の汚れなどに気づいた場合も、同様に知らせてください。
3. 解答用紙(マークシート)は折り曲げたり、汚したりしないでください。
4. 解答は、すべて解答用紙(マークシート)に記入し、解答用紙(マークシート)の枠外には、なにも書かないでください。
5. 試験問題は問題記号ア～ヲで45問あります。
解答用紙(マークシート)には、問題記号がア～ンまで印刷されています。解答にあたっては、問題記号ア～ヲの範囲内で該当する解答欄に解答してください。
6. 解答上の注意は、裏表紙に記載してあるので、この問題冊子を裏返して必ず読んでください。ただし、問題冊子を開いてはいけません。
7. マークは必ずHBの黒鉛筆を使用し、訂正する場合は、完全に消してからマークしてください。
8. 監督者の指示に従って、解答用紙(マークシート)に解答する科目、受験番号をマークするとともに、受験番号、氏名を記入してください。
9. 解答する科目、受験番号、解答が正しくマークされていない場合は、採点できないことがあります。
10. 筆記用具以外は、使用しないでください。
11. 試験終了後、問題冊子は持ち帰ってください。

[I]

(1) $ab + 3a + 2b = 10$ を満たす整数 a, b の組は全部で 個ある.

(2) $x + \frac{1}{x} = 4$ のとき, $x^3 + \frac{1}{x^3} =$ である.

(3) a は定数とする. 2次不等式 $x^2 + ax + a + 8 > 0$ の解がすべての実数であるような a の値の範囲は $< a <$ である.

(4) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ とする. $\tan \theta = \frac{1}{7}$ のとき, $\sin \theta = \frac{\sqrt{\text{オ}}}{\text{カ}},$

$\sin 2\theta = \frac{\text{キ}}{\text{ク}}$ である.

(5) 不等式 $2^{2x} - 2^{x+1} + 2^x - 2 > 0$ の解は $x >$ である.

〔Ⅱ〕

(1) 6個の数字0, 1, 2, 3, 4, 5を用いて3桁の整数をつくる。ただし、同じ数字を繰り返し用いてもよいものとする。

(a) 400以上の数は 個できる。

(b) 2の倍数は 個できる。また、10と互いに素である数は 個できる。

(c) 100や101のように、ちょうど2つの数字からなる数は 個できる。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n = \frac{2^n - 256n - 1}{3}$ と表されるところとする。

(a) $a_1 =$, $a_3 =$

(b) $a_{$ } $= 0$

(c) $a_{n+2} - a_n > 1000$ を満たす最小の自然数 n は である。

〔Ⅲ〕

(1) $OA = 3$, $OB = 5$, $AB = 7$ である $\triangle OAB$ の内心を I とし、直線 OI と辺 AB の交点を C とする。

(a) $\cos \angle AOB = \frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$

(b) $\vec{OC} = \frac{\boxed{\text{ト}}}{8} \vec{OA} + \frac{\boxed{\text{ナ}}}{8} \vec{OB}$, $\vec{OI} = \frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}} \vec{OC}$

(c) $\triangle OAB$ の内接円の半径は $\frac{\sqrt{\boxed{\text{ネ}}}}{\boxed{\text{ノ}}}$ である。

(2) p, q を定数とし、 $f(x) = x^3 + px^2 + q$ とする。方程式 $f(x) = 0$ が 2 を 2 重解にもつとし、他の解を α とする。

(a) $p = \boxed{\text{ハ}}$, $q = \boxed{\text{ヒ}}$, $\alpha = \boxed{\text{フ}}$

(b) 区間 $\alpha \leq x \leq 2$ において、 $f(x)$ は $x = \boxed{\text{ヘ}}$ で最大となる。

(c) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$ における接線の傾きは $t = \boxed{\text{ホ}}$ のとき最小となる。

(d) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積は $\frac{\boxed{\text{マ}}}{\boxed{\text{ミ}}}$ である。

[IV]

(1) i は虚数単位とし、複素数 z の偏角の範囲は $-\pi \leq \arg z < \pi$ とする。

(a) 複素数 $1 + \sqrt{3}i$ を極形式で

$$1 + \sqrt{3}i = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

と表すと、 $r = \boxed{\Delta}$ 、 $\theta = \frac{\boxed{\lambda}}{\boxed{\epsilon}} \pi$ である。

(b) 3つの異なる複素数 z_1, z_2, z_3 が複素数平面上で表す点を $A(z_1), B(z_2), C(z_3)$ とし、

$$\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = 1 + \sqrt{3}i$$

が成り立つとする。このとき、 $\angle ABC = \frac{\boxed{\gamma}}{\boxed{\iota}} \pi$ である。

また、 z_4 を z_1, z_2, z_3 とは異なる複素数とし、 z_4 が複素数平面上で表す点を $D(z_4)$ とすると、点 D が3点 A, B, C を通る円の円周上にあるための必要十分条件は

$$\left| \arg \frac{z_1 - z_4}{z_3 - z_4} \right| = \frac{\boxed{\exists}}{\boxed{\var�}} \pi$$

となることである。

(2) 区間 $x > 0$ で定義された関数 $f(x)$ が $\int_1^{x^2} f(t) dt = (x+1) \log x$ を満たすとする。

(a) $\{(x+1) \log x\}' = \boxed{\updownarrow} \log x + \boxed{\updownarrow} + \frac{\boxed{\updownarrow}}{x}$

(b) $f(x) = \frac{1}{\boxed{\square}} \sqrt{x} \log x + \frac{1}{\boxed{\updownarrow}} \sqrt{x} + \frac{1}{\boxed{\updownarrow}} x$

解答上の注意

問題の文中の などには数値が入ります。それらを解答用紙のア、イ、ウ、…で示された解答欄にマークして答えなさい。

1. 解答欄の各桁の該当する数字の欄にマークしてください。
2. 解答が負数の場合のみ符号欄にマークしてください。

3. 分数形 $\frac{\text{□}}{\text{□}}$ の部分では、既約分数(それ以上約分できない分数)で表し、分母は必ず正とします。また、この形で整数を表すときには、分母を1とします。
4. 根号の中は、正の整数であって、2以上の整数の平方で割り切れないものとします。

解答記入例： に -5 と解答する場合

	符号		10 の 桁		1 の 桁															
エ	●	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	①	②	③	④	●	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩

に 57 と解答する場合

	符号		10 の 桁		1 の 桁															
カ	⊖	①	②	③	④	●	⑥	⑦	⑧	⑨	①	②	③	④	⑤	⑥	●	⑧	⑨	⑩

解答表示例

$\frac{\text{□}}{\text{□}}$ に $-\frac{3}{2}$ を当てはめる場合には $\frac{\text{□}-3}{\text{□}2}$ 、0 の場合には $\frac{\text{□}0}{\text{□}1}$ とします。

$\frac{\text{□}}{\text{□}}\sqrt{\text{□}}$ に $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ を当てはめる場合には $\frac{\text{□}-1}{\text{□}2}\sqrt{\text{□}3}$ とします。

$\text{□}x^3 + \text{□}x^2 + \text{□}x + \text{□}$ に $-x^3 - x + 1$ を当てはめる場合には $\text{□}-1x^3 + \text{□}0x^2 + \text{□}-1x + \text{□}1$ とします。